BAB II

KONSEP DASAR

2.1 Variabel acak, Nilai Harapan dan Varian

Istilah percobaan statistika telah digunakan untuk menjelaskan setiap proses yang menghasilkan pengukuran yang mungkin. Ruang sampel memberikan gambaran menyeluruh setiap hasil yang mungkin, contohnya bila satu mata uang dilemparkan tiga kali sehingga hasilnya berupa pasangan berurutan dari muka adalah "M" dan belakang adalah "B" ruang sampelnya dapat ditulis sebagai berikut:

S = (MMM, MMB, MBM, BMM, MBB, BMB, BBM, BBB).

Bila yang diperlukan hanya banyak muka yang muncul, maka hasil numeriknya 0, 1, 2 atau 3. Bilangan 0, 1, 2 dan 3 merupakan pengamatan acak yang ditentukan oleh hasil percobaan dan dapat dipandang sebagai nilai yang diperoleh suatu variabel acak X yang menyatakan banyak kali 'muka' yang muncul bila satu mata uang dilempar tiga kali.

Definisi 2.1.1

Variabel acak adalah suatu kejadian (event) yang merupakan fungsi bernilai nyata.

Definisi 2.1.2

Variabel acak kontinu adalah variabel acak yang mempunyai nilai atau harga berupa interval.

Nilai harapan atau harapan matematik suatu variabel acak kontinu dapat diperoleh dengan mengalikan tiap nilai variabel acak dengan peluangnya dan kemudian mengintegralkan hasilnya.

Definisi 2.1.3

Misalkan X suatu variabel acak kontinu dengan distribusi peluang f(x). Nilai harapan atau harapan matematik X adalah

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x.f(x)dx$$

Beberapa sifat penting dari nilai harapan, antara lain:

1. E(a) = a, dimana untuk setiap a adalah konstanta.
2. E(aX) = aE(X) ; a = konstanta.
3. $E\left(\prod_{i=1}^{r} X_i\right) = \prod_{i=1}^{r} E(X_i)$, bila X_i adalah variabel acak yang independen.
4. $E\left(\sum_{i=1}^{r} X_i\right) = \sum_{i=1}^{r} E(X_i)$

Dari definisi 2.1.3 didapatkan akibat sebagai berikut :

Akibat 2.1.1

Misalkan X suatu variabel acak dengan distribusi peluang f(x). Nilai harapan fungsi g(x) adalah

$E(g(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)f(x)dx$ bila X kontinu.

Bila $g(x) = x^k$, akibat 2.1.1 menghasilkan nilai harapan yang disebut momen ke-k.

Definisi 2.1.4

Variansi variabel acak X adalah $Var(X) = E(X-E(X))^2$.

Beberapa sifat penting dari varian antara lain :

1. $Var(a) = 0$, untuk setiap a adalah konstanta.
2. Jika a dan b adalah konstanta, maka

   $Var(aX) = a^2\, Var(X)$

   $Var(aX+b) = a^2\, Var(X)$
3. $Var(aX \pm bY) = a^2\, Var(X) + b^2\, Var(Y) \pm 2ab\,Cov(X,Y)$, dimana a dan b adalah konstanta.

   Untuk setiap X,Y variabel acak yang independen $Cov(X,Y) = 0$, sehingga

   $Var(aX+bY) = a^2\, Var(X) + b^2\, Var(Y)$.

Contoh 2.1.1

Andaikan X variabel acak normal yang mempunyai ~~rataan μ dan variansi~~ σ^2 dengan distribusi peluang

$$f(x;\mu,\sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^2} \quad -\infty < x < \infty.$$

Sehingga untuk menghitung harga harapan dan variansi adalah

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^2} dx \cdot$$

Subsitusi $z = (x-\mu)/\sigma$ dan $dx = \sigma\, dz$, sehingga diperoleh

$$E(X)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(\mu+\sigma.z)e^{-z^2/2}\,dz$$

$$=\mu.\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}\,dz+\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}z.e^{-z^2/2}\,dz\,.$$

$$=\mu..1-\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}\,d\,e^{-z^2/2}=\mu$$

Variansi distribusi normal adalah

E[(X-E(X))^2] = E[(X-μ)^2]

$$=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2.\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^2}dx$$

Subsitusi z = (x-μ)/σ dan dx = σ dz, sehingga diperoleh

E[(X-μ)^2] $=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}z^2.e^{-z^2/2}\,dz\,.$

Subsitusi u=z dan du = dz , v= $-e^{-z^2/2}$

dv = $ze^{-z^2/2}\,dz$ **, sehingga diperoleh:**

E[(X-μ)^2] = $\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u.dv$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[u.v-\int_{-\infty}^{\infty}v.du\right]$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\left[-ze^{-z^2/2}+\int_{-\infty}^{\infty}\cdot e^{-z^2/2}\,dz\right]=\sigma^2$$

Beberapa fungsi dari variabel acak :

Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah n variabel acak, maka rata-rata dan varian dari $\sum_{i=1}^{n} a_i X_i$ adalah

1 $E\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i E(X_i)$, dimana a_i konstanta.

2. $Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i)+2\sum_{i=2}^{n}\sum_{j=1}^{i-1} a_i a_j \operatorname{cov}(X_i, X_j)$, dengan $i \neq j$

untuk X_i independen $Cov(X_i, X_j)=0$, sehingga

$$Var\left(\sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right)=\sum_{i=1}^{n} a_i^2 Var(X_i).$$

2.2 Distribusi Normal, Chi-kuadrat dan F fisher

2.2.1 Distribusi Normal

Distribusi ini merupakan distribusi terpenting yang digunakan dalam rancangan percobaaan, karena respon yang diamati diasumsikan mengikuti distribusi normal.

Definisi 2.2.1.1

Suatu variabel acak kontinu X dikatakan berdistribusi normal jika fungsi peluangnya mempunyai bentuk sebagai berikut :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^2} \qquad -\infty < x < \infty.$$

Dengan μ dan σ^2 merupakan parameter rata-rata dan varian dari distribusi normal yang bernilai

$-\infty < \mu < \infty$. dan $0 < \sigma^2 < \infty$.

Definisi 2.2.1.2

Moment generation function (m.g.f) atau fungsi pembangkit momen dari suatu variabel acak X dinotasikan $M_X(t)$ dan didefinisikan sebagai $M_X(t) = E(e^{tx})$.

Beberapa sifat-sifat m.g.f adalah

1. $M_{aX}(t) = M_X(at)$
2. $M_{\sum_{i=1}^{n} X_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{X_i}(t)$ bila X_i independen

Salah satu metode untuk mengetahui distribusi fungsi dari satu atau lebih variabel acak adalah transformasi variabel. Untuk melakukan transformasi variabel diperlukan suatu fungsi pembangkit momen.

Dari definisi 2.2.1.2, maka untuk distribusi normal dengan rata-rata μ dan varian σ^2 mempunyai fungsi pembangkit momen yang akan ditunjukkan pada teorema 2.2.1.1

Teorema 2.2.1.1.

Variabel acak X berdistribusi normal dengan rata- rata μ dan varian σ^2 mempunyai fungsi pembangkit momen $M_X(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$.

Bukti :

$M_X(t) = E(e^{tx})$.

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{(x-\mu)}{\sigma}\right]^2} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[x^2-2\mu x+\mu^2-2tx\sigma^2\right]} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(x-\left(\mu+t\sigma^2\right)\right)^2-\left(\mu+t\sigma^2\right)^2+\mu^2\right]} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}\left[\left(x-\left(\mu+t\sigma^2\right)\right)^2-\left(2t\mu\sigma^2+t^2\sigma^4\right)\right]} dx$$

$$= e^{t\mu+\frac{1}{2}t^2\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\left(\mu+t\sigma^2\right)}{\sigma}\right]^2} dx \quad \text{..........................(2.2.1.1).}$$

misal $w = \left[\frac{x - (\mu + t\sigma^2)}{\sigma}\right]$, $dx = \sigma\, dw$, sehingga persamaan (2.2.1.1) menjadi

$$M_X(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}w^2} dw \, .$$

Karena integral terakhir menyatakan luas daerah dibawah kurva fungsi normal standar , jadi sama dengan 1, sehingga $M_X(t) = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$.

Transformasi variabel dari distribusi normal akan diperoleh distribusi yang akan diterangkan pada teorema sebagai berikut:

Teorema 2.2.1.2.

Jika $X_1, X_2, \ldots, X_n$ adalah n variabel acak berdistribusi normal independen dengan rata-rata μ dan varian σ^2 , maka $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ akan berdistribusi normal independen dengan rata-rata μ dan varian σ^2/n.

Bukti :

$$M_{\bar{x}}(t) = M_{\frac{\Sigma x_i}{n}}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}\left(t/n\right)$$

$$= \exp\left(\frac{t}{n}\mu + \frac{1}{2}t^2\frac{\sigma^2}{n^2}\right)^n = e^{t\mu + \frac{1}{2}t^2\frac{\sigma^2}{n}}$$

dimana $e^{t\mu+\frac{1}{2}t^2.\frac{\sigma^2}{n}}$ adalah fungsi pembangkit momen dari distribusi normal dengan rata-rata μ dan varian σ^2/n, sehingga $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ akan berdistribusi normal independen dengan rata-rata μ dan varian σ^2/n.

Untuk mendapatkan distribusi normal standar yaitu dengan rata-rata nol dan varian satu dilakukan transformasi variabel yaitu (X-μ)/σ, dimana $X \sim N(\mu,\sigma^2)$.

Teorema 2.2.1.3.

Jika $X \sim N(\mu,\sigma^2)$, maka (X-μ) /σ akan berdistribusi normal standar dengan rata-rata nol dan varian satu.

Bukti :

$$M_{\frac{x-\mu}{\sigma}}(t) = M_{x-\mu}\left(\frac{t}{\sigma}\right) = E\left[e^{\frac{t}{\sigma}(x-\mu)}\right] = e^{-\mu.\frac{t}{\sigma}} E\left[e^{\frac{t}{\sigma}.x}\right]$$

$$= e^{-\mu.\frac{t}{\sigma}} M_x\left(\frac{t}{\sigma}\right) = e^{-\mu.\frac{t}{\sigma}} . e^{\mu.\frac{t}{\sigma}+\frac{1}{2}\sigma^2.(t/\sigma)^2} = e^{\frac{1}{2}t^2}$$

dimana $e^{\frac{1}{2}t^2}$ adalah fungsi pembangkit momen dari distribusi normal standar dengan rata-rata nol dan varian satu, sehingga $(X-\mu)/\sigma \sim N(0, 1)$.

Akibat 2.2.1.1.

Jika $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ berdistribusi normal independen dengan rata-rata μ dan varian σ^2/n, maka $\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ distribusi normal standar dengan rata-rata nol dan varian satu, sehingga $\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0, 1)$.

2.2.2 Distribusi Chi-kuadrat (χ^2)

Distribusi chi-kuadrat merupakan distribusi gamma dengan $\alpha = v/2$, $\beta=2$ dan v adalah bilangan bulat positif.

Definisi 2.2.2.1.

Variabel acak kontinu X berdistribusi chi-kuadrat, dengan derajat kebebasan v, bila fungsi peluangnya diberikan oleh

$$f(x) = \frac{1}{2^{v/2}\Gamma\left(v/2\right)} x^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}}, \quad x>0$$

$$= 0 \qquad \text{, untuk x lainnya,} \quad \text{dengan v bilangan bulat positif.}$$

Teorema 2.2.2.1

Distribusi chi-kuadrat mempunyai fungsi pembangkit momen sebagai berikut :

$M_X(t) = (1-2t)^{-v/2}$.

Bukti:

$$M_x(t) = \int_0^\infty e^{tx} \frac{1}{2^{v/2}\Gamma\left(v/2\right)} x^{\frac{v}{2}-1} e^{-\frac{x}{2}} dx$$

$$= \frac{1}{2^{v/2}\Gamma\left(v/2\right)} \int_0^\infty x^{\frac{v}{2}-1} e^{-x.\frac{(1-2t)}{2}} dx$$

Subsitusi y = x(1-2t)/2, jadi dx = 2/(1-2t) dy sehingga

$$M_x(t) = \frac{1}{2^{v/2}\Gamma\left(v/2\right)} \int_0^\infty \left(\frac{2y}{1-2t}\right)^{\frac{v}{2}-1} e^{-y} \cdot \frac{2}{1-2t} dy$$

$$= \frac{1}{\Gamma\left(v/2\right)(1-2t)^{v/2}} \int_0^\infty y^{\frac{v}{2}-1} e^{-y} dy = (1-2t)^{-v/2}$$

Dengan fungsi pembangkit momen pada definisi 2.2.2.1 dapat diperoleh bahwa distribusi normal standart dengan rata-rata nol dan varian satu kemudian dikuadratkan akan diperoleh distribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas satu.

Teorema 2.2.2.2.

Jika X ~ N(0, 1) maka variabel acak Y = X^2 akan berdistribusi chi-kuadrat dengan derajad bebas v = 1, dimana $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}.e^{-\frac{1}{2}x^2}$.

Bukti:

$$M_Y(t)=M_{x^2}(t)=E\left[e^{x^2 t}\right]$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2 t}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}x^2(1-2t)}\,dx$$

subsitusi y = x$(1-2t)^{1/2}$, dx = $(1-2t)^{-1/2}$dy

sehingga

$$M_Y(t)=(1-2t)^{-\frac{1}{2}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}y^2}\,dy=(1-2t)^{-\frac{1}{2}}$$

dimana $(1-2t)^{-\frac{1}{2}}$ adalah fungsi pembangkit momen dari distribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas v = 1.

Teorema 2.2.2.3.

Bila $X_1, X_2, \ldots, X_n$ variabel acak yang saling bebas masing-masing berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat kebebasan $v_1, v_2, \ldots, v_n$, maka variabel acak

$Y = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat kebebasan

$v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.

bukti :

$$M_Y(t) = M_{\sum_{i=1}^{n} x_i}(t) = \prod_{i=1}^{n} M_{x_i}(t)$$

$$= M_{x_1}(t) \times M_{x_2}(t) \times \ldots \times M_{x_n}(t)$$

$$= (1-2t)^{-v_1/2} \times (1-2t)^{-v_2/2} \times \ldots \times (1-2t)^{-v_n/2}$$

$$= (1-2t)^{-(v_1+v_2+\ldots+v_n)/2}$$

yang ternyata merupakan fungsi pembangkitmomen distribusi chi-kuadrat dengan derajat kebebasan $v_1 + v_2 + \ldots + v_n$.

Akibat 2.2.2.1.

Bila $X_1, X_2, \ldots, X_n$ independen berdistribusi normal dengan rata-rata μ dan varian σ^2,

maka $\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i - \mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$

Bukti :

Dari teorema 2.2.1.3 diperoleh $(x-\mu)/\sigma \sim N(0, 1)$ dan menurut teorema 2.2.2.2, maka

$\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_1$ Sehingga dengan menggunakan teorema 2.2.2.3, akan didapatkan

bahwa $\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$.

Akibat 2.2.2.2.

Bila sampel acak ukuran n diambil dari populasi normal dengan rata-rata μ yang tidak diketahui dan varian σ^2,maka $\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.

Bukti :

Dari persamaan yang ditunjukkan sebagai berikut:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2} + n\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{\sigma^2}$$

dimana $\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_n$ .serta menurut teorema 2.2.2.2 diperoleh bahwa

$n\frac{(\bar{x}-\mu)^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_1$, maka mengakibatkan bahwa $\sum_{i=1}^{n} \frac{(x_i-\bar{x})^2}{\sigma^2} \sim \chi^2_{n-1}$.

Dari akibat 2.2.2.2 dapat diperoleh suatu distribusi dari jumlah kuadrat dibagi dengan harga harapan rata-rata kuadrat berdistribusi chi-kuadrat.

Akibat 2.2.2.3.

Jumlah kuadrat dibagi dengan harga harapan rata-rata kuadrat akan berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat bebas jumlah taraf faktor dikurangi satu.

Bukti :

Misal : A adalah faktor dengan a buah taraf faktor

SSA adalah jumlah kuadrat perlakuan A

Dimana SSA = $\sum_{i=1}^{a}\left(x_i - \bar{x}\right)^2$, dengan X_i adalah rata-rata perlakuan A dan $\bar{x}$ adalah rata-rata total = $\frac{1}{a}\sum_{i=1}^{a} x_i$.

E(MSA) adalah harga harapan rata-rata kuadrat perlakuan A yang merupakan var (A).

Sehingga SSA/E(MSA) ~ χ^2_{a-1}.

2.2.3 Distribusi F fisher

Salah satu distribusi yang terpenting dalam statistika terapan adalah distribusi F. Statistik F didefinisikan sebagai nisbah dua peubah acak chi-kuadrat yang bebas, masing-masing dibagi dengan derajat kebebasannya.

Definisi 2.2.3.1.

Misalkan X dan Y dua variabel acak bebas masing-masing berdistribusi chi-kuadrat dengan derajat kebebasan v_1 dan v_2. Maka distribusi variabel acak Z

$Z = \dfrac{X/v_1}{Y/v_2}$ berdistribusi F dengan derajat bebas pembilang v_1 dan derajat bebas penyebut v_2, dengan distribusi peluangnya adalah

$$f(z) = \frac{\Gamma\left[\frac{(v_1 + v_2)}{2}\right]\left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{v_1/2}}{\Gamma\left(\frac{v_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v_2}{2}\right)} \cdot \frac{z^{v_1/2 - 1}}{\left(1 + v_1 \cdot \frac{z}{v_2}\right)^{(v_1+v_2)/2}}, \quad 0 < z < \infty .$$

2.3 Konsep Estimasi

Dalam analisa statistik, estimasi digunakan untuk menaksir parameter populasi yang tidak diketahui misalnya dalam distribusi $N(\mu, \sigma^2)$ parameter yang belum diketahui adalah μ dan σ^2. Untuk menaksir parameter yang belum diketahui biasanya diperlukan beberapa asumsi mengenai distribusi dan independen.

Definisi 2.3.1

Fungsi dari sampel $T\left(\underset{\sim}{x}\right)$ disebut suatu statistik untuk parameter θ maka setiap $T\left(\underset{\sim}{x}\right)$ merupakan estimator, estimator dari θ dengan notasi $\hat{\theta} = T\left(\underset{\sim}{x}\right)$.

Nilai duga (estimate) adalah besaran sebagai hasil penerapan penduga terhadap data dari suatu sampel.

Pada pembahasan ini metode estimasi yang digunakan adalah estimasi ANOVA. Metode estimasi ANOVA berdasar pada penurunan suatu nilai harapan. Untuk mendapatkan estimator, dengan menyamakan harga harapan rata-rata kuadrat dengan rata-rata kuadrat dari analisis varian dan mengganti parameter dengan notasi estimator dari parameter. (Shayle. R, 1992).

Contoh 2.3.1:

Pada model random klasifikasi satu arah pada data seimbang mempunyai komponen varian σ^2_α dan σ^2_e. Dimana model liniernya adalah $Y_{ij} = \mu + \alpha_i + e_{ij}$ dan diperoleh harga harapan jumlah kuadrat perlakuan E(SSA) = (a-1).(n $\sigma^2_\alpha + \sigma^2_e$) serta harga harapan jumlah kuadrat galat E(SSE) = a(n-1) σ^2_e.

Sehingga E(MSA) = n $\sigma^2_\alpha + \sigma^2_e$

dan E(MSE) = σ^2_e ....(2.3.1).

Estimator komponen varian σ^2_α dan σ^2_e dapat dicari sebagai berikut

E(MSE) = MSE

$$\hat{\sigma}^2_e = \text{MSE}$$

E(MSA) = MSA

$$n\hat{\sigma}^2_\alpha + \hat{\sigma}^2_e = \text{MSA}$$

$$n\hat{\sigma}^2_\alpha + \text{MSE} = \text{MSA}$$

$$\hat{\sigma}^2_\alpha = \frac{MSA - MSE}{n}$$

Untuk mendapatkan estimator yang baik, salah satu sifat yang dipenuhi adalah tak bias.

Definisi 2.3.2

Statistik $\hat{\theta}$ dikatakan estimator tak bias bagi parameter θ bila $E(\hat{\theta}) = \theta$.

Contoh 2.3.2:

pada contoh 2.3.1 diperoleh estimator untuk σ^2_e adalah MSE, sehingga

$E(\hat{\sigma}^2_e)$ = E(MSE) sesuai dengan persamaan (2.3.1)

$= \sigma^2_e$

dan estimator untuk $\sigma^2_\alpha = \hat{\sigma}^2_\alpha = \frac{MSA - MSE}{n}$

$$E\left[\hat{\sigma}^2_\alpha\right] = E\left[\frac{MSA - MSE}{n}\right] = \frac{1}{n}E(MSA) - \frac{1}{n}E(MSE)$$ (sesuai dengan persamaan (2.3.1))

$$= 1/n \,.\, (n\,\sigma^2_\alpha + \sigma^2_e) - 1/n.\ \sigma^2_e = \sigma^2_\alpha.$$

karena $\hat{\sigma}^2_e = \sigma^2_e$ dan $\hat{\sigma}^2_\alpha = \sigma^2_\alpha$, maka estimator untuk σ^2_α dan σ^2_e adalah estimator yang bersifat tak bias.

2.3.1 Estimator Titik

Jika sebuah model mempunyai komponen varaian σ^2_α dan σ^2_e dan mengikuti distribusi tertentu. Diperoleh rata-rata kuadrat untuk galat (MSE) sebagai berikut

$$MSE = \frac{SSE}{a(n-1)} = \frac{\sum_{ij}(y_{ij} - \overline{y_{i.}})^2}{a(n-1)}$$ dinamakan estimator titik dari varian galat (σ^2_e).

Estimator ini sering ditulis $\hat{\sigma}^2_e$ karena merupakan estimator untuk σ^2_e.

2.3.2 Estimator Selang / Interval

Jika E(MSA) adalah harga harapan rata-rata kuadrat untuk perlakuan A yang merupakan komponen varian untuk perlakuan A yan belum diketahui, sehingga

E(MSA) merupakan parameter yang belum diketahui. β_i dan β_z ditentukan sedemikian rupa sehingga $P(\beta_i < E(MSA) < \beta_z) = (1-\alpha)$, maka selang

$\beta_i < E(MSA) < \beta_z$ disebut selang kepercayaan (interval konfidensi) $(1-\alpha)$ 100% untuk parameter yang tidak diketahui E(MSA), β_i dan β_z disebut batas kepercayaan bawah dan batas kepercayaan atas.

Mengenai konsep estimasi dengan metode ANOVA akan dibahas lebih lanjut pada bab III.

2.4 Pengujian Hipotesa

Estimasi dan pengujian hipotesa merupakan dua hal yang saling berkaitan erat dalam statistik untuk membuat keputusan dan penarikan kesimpulan. Benar atau salahnya suatu hipotesa tidak diketahui dengan pasti kecuali jika seluruh populasi diamati untuk mengetahui benar atau salah, maka perlu dilakukan pengujian yang dikenal sebagai pengujian hipotesa. Untuk melakukan pengujian hipotesis terhadap komponen varian dimana varian adalah bentuk kuadrat sehingga distribusi yang digunakan cenderung ke bentuk chi-kuadrat. Statistik F merupakan pembagian dua peubah acak chi-kuadrat sehingga dapat digunakan untuk tes hipotesis mengenai komponen varian.

Contoh 2.4.1

Misal $\sigma^2_{\alpha\beta}$ adalah varian dari faktor interaksi, MSAB dan MSE adalah rata-rata kuadrat untuk faktor interaksi dan galat, sehingga untuk melakukan tes hipotesis terhadap komponen varian yaitu $\sigma^2_{\alpha\beta}$ adalah sebagai berikut :

Ho : $\sigma^2_{\alpha\beta} = 0$

H_1 : $\sigma^2_{\alpha\beta \neq 0}$

F_{hitung} = MSAB/MSE

F_{hitung} dibandingkan dengan F_{tabel}, jika F_{hitung} lebih besar atau sama dengan F_{tabel} maka Ho akan ditolak.

2.5 Rancangan Percobaan

Beberapa istilah dalam rancangan percobaan antara lain :

1. Perlakuan (treatment) adalah macam-macam prosedur yang pengaruhnya diukur dan dibandingkan satu dengan yang lain.

   Contoh pada percobaan yang digunakan untuk mengetahui pemahaman siswa dalam membaca berdasarkan jenis buku dan kualitas siswa, seperti yang ditunjukkan pada tabel 3.5.1. Dimana jenis buku dapat disebut perlakuan.
2. Galat percobaan adalah suatu ukuran ketidakmampuan materi-materi percobaan untuk memberikan respon yang sama terhadap perlakuan sama yang diterimanya.
3. Replikasi atau ulangan adalah pengulangan daripada eksperimen dasar.

Sebelum melakukan percobaan peneliti menentukan rancangan percobaan terlebih dahulu. Pada pembahasan ini rancangan yang digunakan adalah rancangan faktorial dengan rancangan dasar rancangan acak lengkap (RAL). Rancangan faktorial adalah rancangan yang terdiri dari dua atau lebih faktor, dimana jika hubungan antara faktornya adalah crossed, maka disebut klasifikasi crossed. Misal faktor A adalah crossed dengan faktor B, jika setiap tingkat dari faktor A terjadi kombinasi dengan setiap tingkat dari faktor B. Bila dalam percobaan banyaknya pengamatan pada tiap tingkat faktor sama, maka percobaaan tersebut disebut percobaan dengan data seimbang. Dalam mengklasifikasikan data menurut faktor dan tingkatnya terdapat perbedaan tingkat faktor yang dapat mempengaruhi variabilitas data yang disebut pengaruh atau efek faktor.

Menurut Shayle (1992), terdapat dua jenis pengaruh faktor, yaitu pengaruh tetap dan pengaruh random. Pengaruh tetap adalah pengaruh yang diambil dari himpunan berhingga tingkat-tingkat faktor yang terdapat dalam data dan dipilih oleh seorang peneliti. Sedangkan pengaruh random adalah pengaruh yang diambil dari himpunan takhingga tingkat-tingkat faktor yang terdapat dalam data, yang mana tingkat-tingkat faktor tersebut dipilih secara random dari beberapa tingkat faktor. Sebagai ilustrasi empat buah roti diambil dari tiap oven yang berjumlah 6 buah pada tiga buah suhu yang berbeda, suhu oven dipandang sebagai pengaruh tetap karena ditentukan oleh peneliti. Sedangkan oven dipandang sebagai pengaruh random, karena oven dipilih secara random yang dapat dipandang sebagai sampel dari populasi oven yang dianggap takhingga. Pada pengaruh tetap hanya terdapat satu variabilitas, yaitu variabilitas galat atau variabilitas antar data dalam satu tingkat faktor tanpa memperhatikan tingkat faktor, karena tingkat faktor ditentukan oleh peneliti. Pada pengaruh random, karena tingkat-tingkat faktor dipilih secara random, maka terdapat dua variabilitas yaitu variabilitas galat dan variabilitas perlakuan yaitu variabilitas antar tingkat faktor. Untuk model campuran klasifikasi dua arah terdiri dari pengaruh tetap dan pengaruh random jadi salah satu faktornya dianggap tetap dan untuk pembahasan selengkapnya di bab III.